8.2 궤도 각운동량 연산자의 위치표현과 고유상태 (Orbital Angular Momentum Operator in Position Representation and its Eigenstates)

이 절에서는 궤도 각운동량 연산자의 위치 표현을 살펴보겠다.
먼저 궤도 각운동량 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ 에 운동량 연산자의 위치표현 $\vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ 을 써서 궤도 각운동량 연산자의 위치 표현을 알아보자. 일단 구면좌표에서(그림[8.1] 참조) 위치벡터 연산자가 $\vec{r} = \hat{r}\, r$로 간결하게 주어지므로, 기울기벡터 연산자 $\vec{\nabla}$ 도 동일하게 구면좌표에서 표현하면 다음과 같다.

$$\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

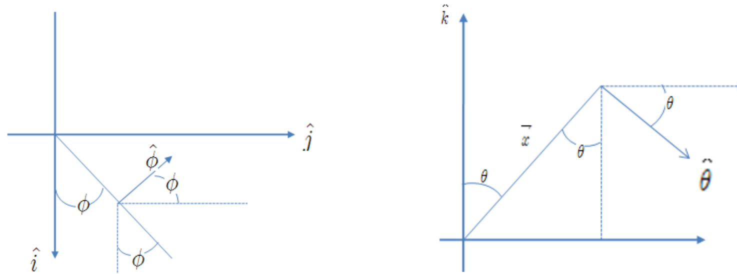
여기에 구면좌표에서의 단위벡터들 사이의 벡터곱, $\hat{r}\times\hat{r}=0$, $\hat{r}\times\hat{\theta}=\hat{\phi}$ 및 $\hat{r}\times\hat{\phi}=-\hat{\theta}$ 를 사용하면, 궤도 각운동량 연산자는 다음과 같이 쓸 수 있다.

그림[8.1] 구면좌표계

$$\vec{L} = \vec{r}\times\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} = \hat{r}\,r\times\frac{\hbar}{i}\left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right) = \frac{\hbar}{i}\left(\hat{\phi}\frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$$

한편, 궤도 각운동량 연산자 성분들 사이의 교환관계식은 직각좌표에서 주어졌으므로 앞 절에서 주어진 각운동량 연산자의 고유상태를 주는 연산자 방정식을 살펴보기 위해서는 위의 구면좌표 표현을 직각좌표계로 변환하여 표현하여야 한다. 이를 위해서 우리는 다음의 관계를 사용하고자 한다(그림[8.2] 참조).

$$\hat{\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi\,,\quad \hat{\theta} = \hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta\,.$$



그림[8.2] 구면좌표 단위벡터들의 직각좌표에서의 성분 표현

위의 관계를 궤도 각운동량 연산자 $\vec{L}$ 의 구면좌표 표현에 적용하면 다음과 같다.

$$\vec{L} = \frac{\hbar}{i}\left\{(-\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} - (\hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta)\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}$$

그러므로 궤도 각운동량 연산자의 직각좌표 성분들은 다음과 같이 주어진다.

$$L_x = \frac{\hbar}{i}\left\{-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\theta\cos\phi\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right\} = \frac{\hbar}{i}\left\{-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right\},$$

$$L_y = \frac{\hbar}{i}\left\{\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\theta\sin\phi\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right\} = \frac{\hbar}{i}\left\{\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right\},$$

$$L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi} \ .$$

그리고 궤도 각운동량 벡터 제곱의 연산자를 얻기 위하여는 $\vec{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ 에서 각 성분들의 제곱을 구하면 다음과 같다.

$$L_x^2 = (\frac{\hbar}{i})^2\left(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$= -\hbar^2\left\{-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) - \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\left(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right\}$$

$$= -\hbar^2\left\{\sin^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}(\cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}) + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta})\right.$$

$$\left. + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}(\cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi})\right\}$$

$$= -\hbar^2\left\{\sin^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \sin\phi\cos\phi(-\frac{1}{\sin^2\theta})\frac{\partial}{\partial\phi} + \sin\phi\cos\phi\cot\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi} + \cot\theta\cos^2\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\right.$$

$$\left. + \cot\theta\cos\phi\sin\phi\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\theta} - \cot^2\theta\cos\phi\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi} + \cot^2\theta\cos^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right\},$$

$$L_y^2 = (\frac{\hbar}{i})^2\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$= -\hbar^2\left\{\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right\}$$

$$= -\hbar^2\left\{\cos^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}(\cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}) - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta})\right.$$

$$\left. + \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}(\cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi})\right\}$$

$$= -\hbar^2\left\{\cos^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \cos\phi\sin\phi(-\frac{1}{\sin^2\theta})\frac{\partial}{\partial\phi} - \cos\phi\sin\phi\cot\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi} + \cot\theta\sin^2\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\right.$$

$$\left. - \cot\theta\sin\phi\cos\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi} + \cot^2\theta\sin\phi\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi} + \cot^2\theta\sin^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right\},$$

$$L_z^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \ .$$

이상 결과를 모두 더하면, 궤도 각운동량 벡터 제곱의 연산자는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 &= L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \\ &= -\hbar^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \cot^2\theta \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right\} \\ &= -\hbar^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right\} \\ &= -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right\} \end{aligned}$$

이는 7.2절에서 구한 라플라시안의 각도 부분(angular part)과 동일하므로, 우리는 라플라시안을 지름방향(r) 미분 연산자와 각운동량 연산자로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) - \frac{\vec{L}^2}{\hbar^2 r^2} \ . \end{aligned}$$

이를 쓰면 일반적인 해밀토니안에서 운동에너지의 연산자 표현은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \right)^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{\vec{L}^2}{2m r^2} \ .$$

그러므로 중심력장 해밀토니안의 고유상태를 r의 함수와 $\vec{L}^2$의 고유상태로 분리하여 쓰면,

$$H\Psi = E\Psi \ , \quad \left\{ \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) \right\} \Psi(r,\theta,\phi) = \left\{ \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) \right\} R(r)\, Y_l^m(\theta,\phi) = E\, R(r)\, Y_l^m(\theta,\phi)$$

이 되고, 앞 절에서 구한 각운동량 연산자의 고유상태 관계식 $\vec{J}^2 \phi_{j,m} = j(j+1)\hbar^2 \phi_{j,m}$을 적용하면 궤도 각운동량의 경우 $\vec{L}^2 Y_l^m = l(l+1)\hbar^2 Y_l^m$ 이 되어 원심 장벽을 갖는 유효퍼텐셜 $V_{eff.} \equiv V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2}$ 의 지름방정식을 얻는다.

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dR}{dr}) + \frac{2m}{\hbar^2} \left\{ E - V(r) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} R = 0$$

이는 왜 우리가 7장에서 각방정식 부분의 상수를 $l(l+1)$ 형태로 놓았는지 알 수 있게 한다.
한편 고유상태를 올리고 내려주는 올림과 내림 연산자 L_+, L_- 의 표현은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L_+ = L_x + i L_y &= \frac{\hbar}{i} \left\{ -\sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi} + i\cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - i\cot\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \right\} \\ &= \frac{\hbar}{i} \left\{ i(\cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + i\sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta}) - \cot\theta (\cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi} + i\sin\phi \frac{\partial}{\partial\phi}) \right\} \end{aligned}$$

$$=\hbar\, e^{i\phi}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}+i\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right\},$$

$$L_- = L_x - i\,L_y = \frac{\hbar}{i}\left\{-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\,\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}-i\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}+i\cot\theta\,\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}$$

$$=\frac{\hbar}{i}\left\{-i(\cos\phi\,\frac{\partial}{\partial\theta}-i\sin\phi\,\frac{\partial}{\partial\theta})-\cot\theta(\cos\phi\,\frac{\partial}{\partial\phi}-i\sin\phi\,\frac{\partial}{\partial\phi})\right\}$$

$$=\hbar\, e^{-i\phi}\left\{-\frac{\partial}{\partial\theta}+i\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}.$$

이 올림과 내림 연산자를 사용하여 우리는 7장에서 각방정식의 해로 언급한 구면조화함수를 구할 수 있다. 먼저 앞 절에서 얻은 $J_+\phi_{m_{\max}}=0$, $J_z\phi_m = m\hbar\,\phi_m$ 의 관계식을 적용하면 $L_+ Y_l^{m=l}=0$, $L_z\,Y_l^{\,m} = m\hbar\,Y_l^{\,m}$ 으로 쓸 수 있고, $Y_l^{\,m}(\theta,\phi)=\Theta_l^m(\theta)\,\Phi_m(\phi)$ 으로 변수분리하여 쓰면,

$$L_+\,Y_l^{\,m=l} = \hbar e^{i\phi}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}+i\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}\Theta_l^l(\theta)\,\Phi_l(\phi)=0\,,$$

$$L_z\,Y_l^{\,m} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\left\{\Theta_l^{\,m}(\theta)\,\Phi_m(\phi)\right\} = m\hbar\,\Theta_l^m(\theta)\,\Phi_m(\phi)$$ 이 된다.

두 번째 식에서 일단 $\Phi_m(\phi)=Ne^{im\phi}$ (N은 적분상수)로 주어짐을 알 수 있다. 이를 적용하면 첫 번째 식은 다음과 같이 된다.

$$(\frac{d}{d\theta}-l\cot\theta)\,\Theta_l^l(\theta)=0$$

이는 $\dfrac{d\Theta_l^l}{\Theta_l^{\,l}} = l\,\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta = l\,\dfrac{d(\sin\theta)}{\sin\theta}$ 로 다시 쓰면, 그 해가 $\Theta_l^{\,l} = C_l^l\,\sin^l\theta$ (C_l^l는 적분상수)로 주어짐을 곧 알 수 있다. 그러므로 $Y_l^{\,l}(\theta,\phi)=A_l^l\,\sin^l\theta\,e^{il\phi}$ 이 된다. 여기서 $A_l^{\,l}$는 규격화 상수로 $\int_{\theta=0}^{\pi}d\theta\int_{\phi=0}^{2\pi}d\phi\,|\,Y_l^l(\theta,\phi)|^2\sin\theta=1$ 를 만족한다. 이제 다시 앞 절에서 구한 관계식 $J_-\,\phi_{j,m}\propto\phi_{j,\,m-1}$ 로부터 $L_-\,Y_l^{\,m}\propto Y_l^{\,m-1}$ 이 성립하므로, 우리는 모든 Y_l^m 을 $Y_l^{\,l}$ 로부터 L_- 를 적용하여 바로 구할 수 있다.

$$Y_l^{l-1}\propto L_-\,Y_l^l\,,$$
$$Y_l^{l-2}\propto L_-\,Y_l^{l-1}\propto(L_-)^2\,Y_l^l\,,$$
$$Y_l^{l-3}\propto L_-\,Y_l^{l-2}\propto(L_-)^3\,Y_l^l\,,$$
$$\vdots$$

이러한 과정을 $Y_l^{\,-l}\propto(L_-)^{2l}\,Y_l^{\,l}$ 까지 계속하면 모든 Y_l^m 을 구할 수 있다(앞 절에서 얻은 관계식 $J_-\phi_{m_{\min}}=0$ 에서 $L_-\,Y_l^{\,-l}=0$ 임을 기억하자). 여기서 비례상수들은 Y_l^m 의

규격화 조건식 $\int_{\theta=0}^{\pi} d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \, | Y_l^m(\theta,\phi)|^2 \sin\theta = 1$ 으로부터 결정된다. 이제 이러한 표현들이 구체적으로 어떻게 주어지는지 살펴보자. 먼저, $Y_l^{l-1} \propto L_- \, Y_l^l$ 은 위에서 구한 Y_l^l 과 L_- 를 사용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Y_l^{l-1} \propto \hbar \, e^{-i\phi}\left\{-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}(\,A_l^{\,l}\sin^l\theta\; e^{il\phi})$$

여기서 앞 절에서 구한 관계식 $J_-\,\phi_{j,m} = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\;\phi_{j,m-1}$ 으로부터 $L_- \, Y_l^l \sim \hbar \, Y_l^{l-1}$ 가 되므로, 상수 $\hbar$는 서로 상쇄되어 다시 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} Y_l^{l-1} &= C\,'\,e^{-i\phi}\left\{-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}(\,\sin^l\theta\; e^{il\phi}) \\ &= C\,'\,e^{i(l-1)\phi}\left\{-\frac{d}{d\theta} - l\cot\theta\right\}\sin^l\theta \\ &= C\,'\,e^{i(l-1)\phi}\left(-\frac{1}{\sin^l\theta}\frac{d}{d\theta}\right)\sin^{2l}\theta \end{aligned}$$

맨 마지막 과정에서 우리는 $\left(\frac{d}{d\theta} + l\cot\theta\right)f(\theta) = \frac{1}{\sin^l\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin^l\theta\; f(\theta)\right]$의 관계를 사용하였다. 이를 반복하면, 우리는 다음의 관계를 얻는다.

$$\begin{aligned} Y_l^{l-2} &= C''\,e^{-i\phi}\left\{-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}\left[e^{i(l-1)\phi}\left(-\frac{1}{\sin^l\theta}\frac{d}{d\theta}\right)\sin^{2l}\theta\right] \\ &= C''\,e^{i(l-2)\phi}\left\{-\frac{d}{d\theta} - (l-1)\cot\theta\right\}\left[\left(-\frac{1}{\sin^l\theta}\frac{d}{d\theta}\right)\sin^{2l}\theta\right] \\ &= C''\,e^{i(l-2)\phi}\left(-\frac{1}{\sin^{l-1}\theta}\frac{d}{d\theta}\right)\left[\sin^{l-1}\theta\left(-\frac{1}{\sin^l\theta}\frac{d}{d\theta}\right)\sin^{2l}\theta\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_l^{l-3} &= C'''\,e^{-i\phi}\left\{-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right\} \\ &\qquad \left\{e^{i(l-2)\phi}\left(-\frac{1}{\sin^{l-1}\theta}\frac{d}{d\theta}\right)\left[\sin^{l-1}\theta\left(-\frac{1}{\sin^l\theta}\frac{d}{d\theta}\right)\sin^{2l}\theta\right]\right\} \\ &= C'''\,e^{i(l-3)\phi}\left\{-\frac{d}{d\theta} - (l-2)\cot\theta\right\} \\ &\qquad \left[\left(-\frac{1}{\sin^{l-1}\theta}\frac{d}{d\theta}\right)\left\{\sin^{l-1}\theta\left(-\frac{1}{\sin^l\theta}\frac{d}{d\theta}\right)\sin^{2l}\theta\right\}\right] \end{aligned}$$

$$= C''' e^{i(l-3)\phi}\left(-\frac{1}{\sin^{l-2}\theta}\frac{d}{d\theta}\right)$$
$$\left[\sin^{l-2}\theta\left(-\frac{1}{\sin^{l-1}\theta}\frac{d}{d\theta}\right)\left\{\sin^{l-1}\theta\left(-\frac{1}{\sin^{l}\theta}\frac{d}{d\theta}\right)\sin^{2l}\theta\right\}\right],$$
$$\vdots$$

그리고 $Y_l^m \propto (L_-)^{l-m} Y_l^l$ 이므로 이 과정을 반복하여 우리는 다음과 같이 Y_l^m 이 주어짐을 알 수 있다.

$$Y_l^m = \widetilde{C}\, e^{im\phi}\left(-\frac{1}{\sin^{m+1}\theta}\frac{d}{d\theta}\right)\left[\sin^{m+1}\theta\left(-\frac{1}{\sin^{m+2}\theta}\frac{d}{d\theta}\right)\right]$$
$$\left[\sin^{m+2}\theta\left(-\frac{1}{\sin^{m+3}\theta}\frac{d}{d\theta}\right)\left\{\sin^{m+3}\theta \cdots \left(-\frac{1}{\sin^{l}\theta}\frac{d}{d\theta}\right)\sin^{2l}\theta\right\}\right]$$
$$= \widetilde{C}\, e^{im\phi}\frac{1}{\sin^{m}\theta}\left(-\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^{l-m}[\,\sin^{2l}\theta\,]$$

여기서 $\cos\theta \equiv x$ 로 놓으면, θ 의 함수 부분은 다음과 같이 쓸 수 있으며,

$$\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}\left(\frac{d}{dx}\right)^{l-m}(1-x^2)^l \propto P_l^m(x)$$

이는 7장에서 언급한 버금 르장드르 함수(associated Legendre function) $P_l^m(x)$ 에 해당한다. 즉, $Y_l^m(\theta,\phi) = \widetilde{A}\, e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta)$ 로 주어진다. 여기서 $\widetilde{A}$ 는 앞서 언급한 규격화 조건 $\int_{\theta=0}^{\pi} d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi\, |Y_l^m(\theta,\phi)|^2 \sin\theta = 1$을 만족하는 상수이며, 함수 $Y_l^m(\theta,\phi)$ 가 바로 7장에서 언급한 구면조화함수이다. 끝으로 l, m 이 가질 수 있는 값에 대하여 언급하면, 7장의 끝부분에서 이미 언급하였다시피 물리적으로 $\phi \sim \phi + 2\pi$ 는 동등하므로 이러한 값들에서 $Y_l^m(\theta,\phi)$ 는 동일한 함수값을 가져야 한다. 그러므로 m 은 정수값을 가진다. 그리고 $m = l, l-1, l-2, \cdots, -l+1, -l$ 의 값을 가지므로, l 역시 영보다 크거나 같은 정수값을 가진다. 즉, 궤도 각운동량의 양자수 l, m 은 정수값만 가질 수 있다. 그런데 앞 절에서 우리는 일반적인 각운동량의 경우 양자수 j 가 반정수($\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots$)도 가질 수 있음을 보았다 (따라서 m_j 도 반정수 값을 가질 수 있다). 이러한 양자수는 궤도 각운동량의 경우 허용되지 않고, 우리가 다음에서 다룰 스핀 각운동량의 경우에만 허용된다.